歐拉線的一個性質及其應用

于志洪

摘要: 歐拉 (Euler, 1707~1783) 於 1765 年提出了著名的歐拉線定理“三角形的垂心、重心與外心在一條直線上。” 本文先介紹一種解析證法, 而後談談從證明中得到一個性質的應用。供高中師生教與學時參考。

關鍵字: 歐拉線性質、證明、應用。

一、歐拉線定理的解析證明

證明: 如圖 1, O、G、H 分別爲 $\triangle ABC$ 的外心、重心和垂心, 以 AB 爲 x 軸, CH 爲 y 軸建立平面直角坐標系, 設 $A(a,0)$、$B(b,0)$、$C(0,c)$, E、F 分別爲 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 的中點, 則 $E\Big(\dfrac{a+b}{2},0\Big)$、$F\Big(\dfrac{b}{2},\dfrac{c}{2}\Big)$, CH 的直線方程爲 $x=0$, OE 的直線方程爲 $x=\dfrac{a+b}{2}$。

連結 AH 並延長交 CB 於點 D, 則 AD 的直線方程爲 $y=\dfrac{b}{c}(x-a)$, OF 的直線方程爲 $y-\dfrac{c}{2}=\dfrac{b}{c}(x-\dfrac{b}{2})$, 即 $2bx-2cy-b^2+c^2=0$, 從而可求得 H、O、G 三點的坐標分別爲 $H\Big(0,-\dfrac{ab}{c}\Big)$、$O\Big(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{ab+c^2}{2c}\Big)$、$G\Big(\dfrac{a+b}{3},\dfrac{c}{3}\Big)$。

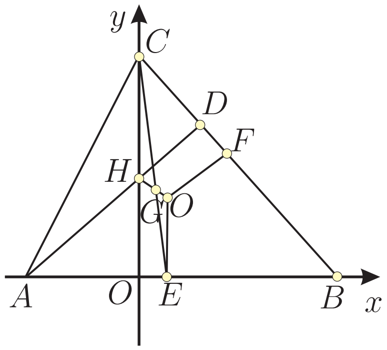

圖1

由於 $\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{1}{3}\times 0+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{a+b}{2}$ 以及 $\dfrac{c}{3}=\dfrac{1}{3}\times\Big(-\dfrac{ab}{c}\Big)+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{ab+c^2}{2c}$, 所以由分點公式知道, 點 G 介於點 O 與點 H 之間, 而且 $\overline{OG}:\overline{GH}=1:2$。

二、歐拉線定理性質的應用

例: 設 $A_1A_2A_3A_4$ 爲圓的內接四邊形, H_1、H_2、H_3、H_4 依次爲 $\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$ 的垂心, 求證 H_1、H_2、H_3、H_4 四點在同一圓上, 並定出該圓的圓心位置。(1992 年全國數學聯賽第二試第一題)

證明: 如圖 2, 不失一般性, 設 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接圓圓心 O 在座標原點, 半徑爲 r, 設四個頂點坐標依次爲 $A_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3,4)$, G_i 分別爲 $\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$ 的重心, 則 G_i 的坐標依次爲

$$G_1=\Big(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\Big),$$
$$G_2=\Big(\frac{x_2+x_3+x_4}{3},\frac{y_2+y_3+y_4}{3}\Big),$$
$$G_3=\Big(\frac{x_3+x_4+x_1}{3},\frac{y_3+y_4+y_1}{3}\Big),$$
$$G_4=\Big(\frac{x_4+x_1+x_2}{3},\frac{y_4+y_1+y_2}{3}\Big).$$

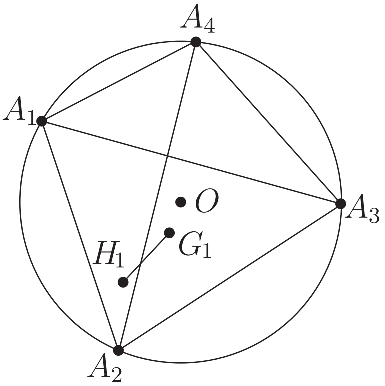

圖2

而由上述歐拉線的性質知 $\overline{OG_i}:\overline{G_iH_i}=1:2$ $(i=1,2,3,4)$, $\therefore \overline{OG_i}=\dfrac{1}{3}\overline{OH_i}$, 所以由分點公式和 $\overline{OG_i}:\overline{G_iH_i}=1:2(i=1,2,3,4)$ 可得垂心 H_i 的坐標公式依次爲:

$$H_1(x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3),\qquad H_2(x_2+x_3+x_4,y_2+y_3+y_4),$$
$$H_3(x_3+x_4+x_1,y_3+y_4+y_1),\qquad H_4(x_4+x_1+x_2,y_4+y_1+y_2).$$

考慮點 $O'(x_1+x_2+x_3+x_4,y_1+y_2+y_3+y_4)$, 容易計算

$$\begin{aligned}O'H_1&=\sqrt{(x_1+x_2+x_3+x_4-x_1-x_2-x_3)^2+(y_1+y_2+y_3+y_4-y_1-y_2-y_3)^2}\\&=\sqrt{x_4^2+y_4^2}=r\end{aligned}$$

同理可計算得到 $O'H_2=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=r$, $O'H_3=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=r$, $O'H_4=\sqrt{x_3^2+y_3^2}=r$, 所以 $O'H_1=O'H_2=O'H_3=O'H_4=r$。於是 H_1、H_2、H_3、H_4 四點在以 O' 爲圓心, 以 r 爲半徑的圓上, 從而命題獲證。

綜上所述可知: 在平時的教學過程中, 注意對著名定理的研究, 符合新課程標準關於“讓學生的思維活躍起來”的理念要求, 利於提高學生學習和研究專題講座的水準, 利於提高教學品質, 利於學生在總結的過程中, 開拓思路, 鞏固所學知識。利於提高學習和解題效率, 利於培養學生的探索精神和創新意識, 利於激發學生學數學用數學的積極性。能夠幫助學生理解課本內容, 提高分析問題和實際問題的能力, 對於啟迪學生思維, 開闊視野、培養和發展學生的思維能力頗有益處。

故筆者認爲: 在今後的教學過程中, 做好引導學生進行這類專題內容的探索與研究, 很有必要。

參考資料

1. 于志洪。歐拉線坐標法證明集錦。《教學通訊》(烏魯木齊教育學院主辦), 1988 年第 6 期。

—本文作者中國江蘇省泰州中學附屬初級中學退休教師—